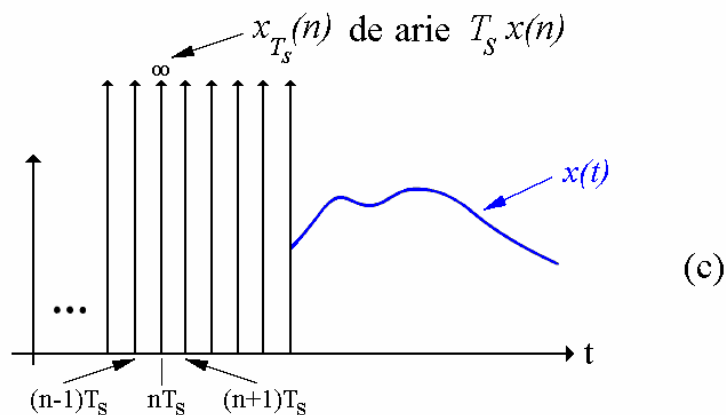
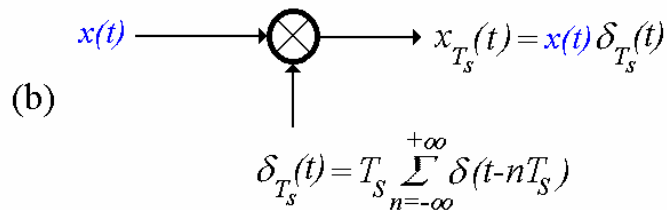
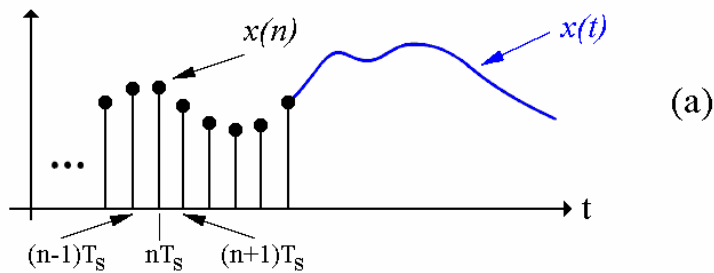


## Eșantionarea ideală și zonele Nyquist

Pentru un semnal analogic real  $x(t)$  eșantionarea reprezintă operația de obținere printr-un procedeu oarecare a valorilor sale de la momente distincte de timp,  $x(n)$ . În aplicațiile de radiocomunicații se utilizează **eșantionare uniformă**, în care momentele de eșantionare a semnalului se succed uniform, echidistant, ca în figura 1-(a) în care cu  $T_s$  s-a notat perioada de eșantionare.

$$x(n) = x(nT_s) \quad (1)$$



**Figura 1**

Din punct de vedere matematic, eșantionarea ideală este echivalată prin multiplicarea semnalului analogic  $x(t)$  cu o succesiune de impulsuri Dirac ce apar la momentele de eșantionare  $nT_s$ ,  $\delta_{T_s}(t)$ , ca în figura 1-(b).

$$x_{T_s}(t) = x(t)\delta_{T_s}(t)$$

unde :

$$\delta_{T_s}(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

în care :

(2)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pentru } t = 0 \\ 0 & \text{pentru } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Pentru ca, dimensional, semnalul continuu  $x(t)$  și cel discret asociat  $x_{T_s}(n)$  să aibe aceeași unitate de măsură, succesiunea de impulsuri  $\delta_{T_s}(t)$  se consideră adimensională, și în plus, de valoare medie 1, situație în care relația integrală din (2) conduce la un impuls Dirac de dimensiune  $1/s$ . Eșantioanele matematice  $x_{T_s}(n)$  au valoare infinită, însă arie finită,  $T_s x(n)$ .

Un șir scurt de reprezentări echivalente permite trecerea din domeniul timp în domeniul frecvență, cu scopul determinării spectrului semnalului eșantionat  $x_{T_s}(n)$ .

$$\begin{aligned} x_{T_s}(t) &= x(t)\delta_{T_s}(t) = \\ &= x(t)T_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \\ &= x(t)T_s \left\{ \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T_s}t} \right\} = \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T_s}t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{jn\frac{2\pi}{T_s}t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$x(t) \Leftrightarrow \underline{X}(\omega)$$

$$x_{T_s}(t) \Leftrightarrow \underline{X}_{T_s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_s}\right) \quad (4)$$

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

Ecuția (4) exprimă faptul că spectrul semnalului creat prin eșantionare,  $\underline{X}_{T_s}(\omega)$ , constă din replici ale spectrului semnalului continuu în timp,  $\underline{X}(\omega)$ , distanțate la multipli întregi ai frecvenței de eșantionare  $f_s = 1/T_s$ . Grafic, efectul pe care eșantionarea îl are în domeniul frecvență este redat în figura 2 pentru cazul unui semnal analogic cu spectru continuu în banda de bază, iar în figura 3 pentru un semnal analogic cu spectrul continuu grupat în jurul unei frecvențe centrale  $f_c$ .

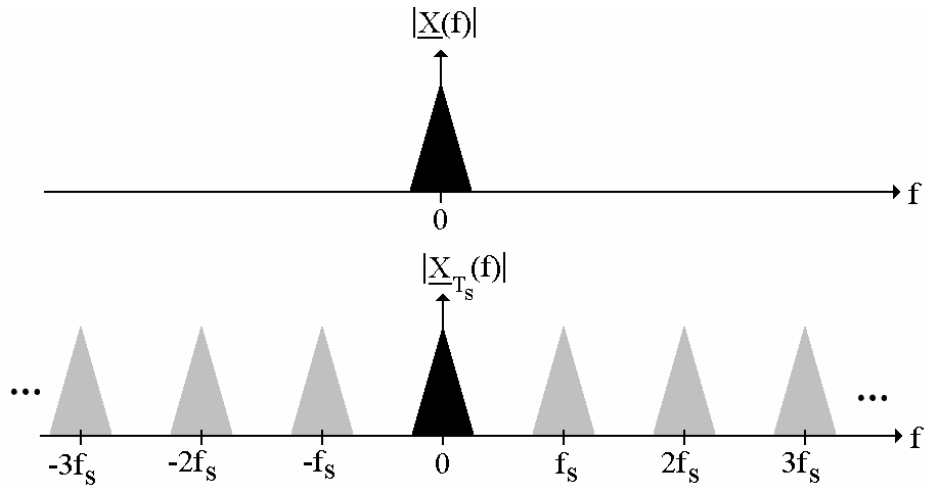


Figura 2

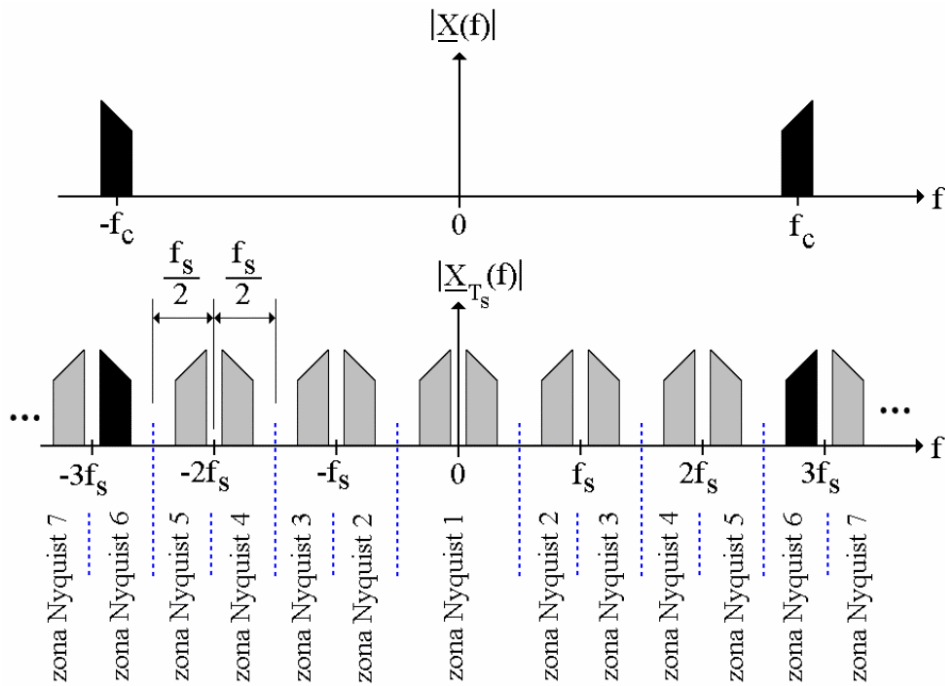


Figura 3

Efectul procesului de eșantionare în domeniul frecvență poate fi gândit ca o partiționare a acestui domeniului în regiuni similare plasate la intervale de  $f_s/2$ . Aceste regiuni sînt cunoscute sub denumirea de *zone Nyquist* și sînt numerotate așa cum se arată în figura 3. Ca urmare a ipotezei de eșantionare a unui semnal real, fiecare zonă Nyquist conține o copie a aceluiași spectru, dar nu identică ci ca o imagine în oglindă a spectrului din zonele Nyquist învecinate, oglindirea avînd loc în raport cu limitele zonei Nyquist respective. Pentru ca spectrele imagine să nu aibe zone de suprapunere, deci să conserve nealterată informația conținută de semnal, trebuie ca frecvența de eșantionare  $f_s$  să fie mai mare decît dublul benzii semnalului analogic supus eșantionării (teorema eșantionării, sau teorema a doua a lui Nyquist).

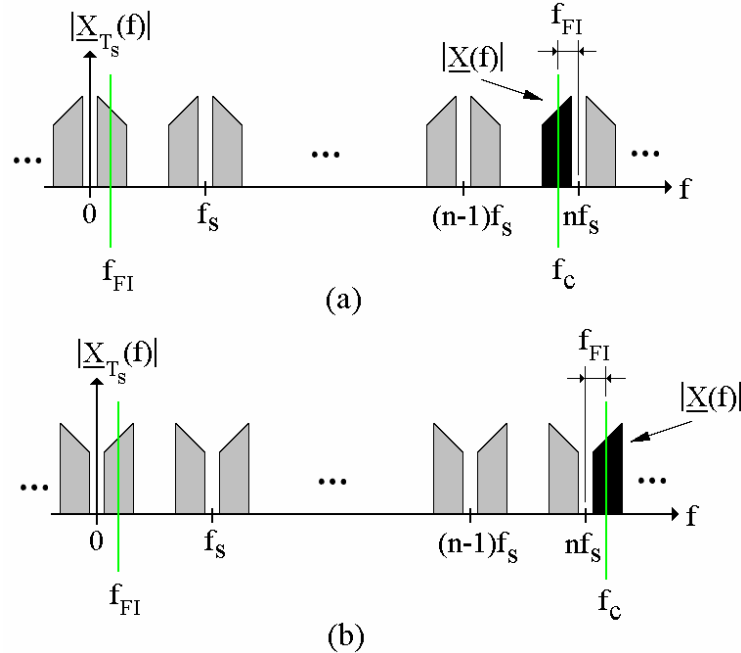


Figura 4

Atunci cînd spectrul original  $\underline{X}(\omega)$  se află în altă zonă Nyquist decît cea de ordin 1, procesul de eșantionare este denumit uzual *subeșantionare* sau *eșantionare trece-bandă*.

Subeșantionarea stă la baza extinderii domeniului numeric în lanțul de prelucrare a semnalelor în echipamentele de radiocomunicație, permițînd conversia analog-numerică a semnalelor de frecvență intermediară mare sau chiar direct de la intrarea în receptor, cu ajutorul dispozitivelor actuale. Spectrul semnalului de înaltă frecvență este adus prin subeșantionare în prima zonă Nyquist, de unde este preluat de blocul de prelucrări numerice pentru mixări, filtrări de canal și demodulări ulterioare. Așa cum este sugerat în figura 4, dacă spectrul semnalului original se află într-o zonă Nyquist de ordin impar el este transpus normal (prin simplă translație) în prima zonă Nyquist, iar dacă este plasat într-o zonă Nyquist pară transpunerea în prima zonă Nyquist este însoțită de inversarea spectrului (adică a ordinii componentelor spectrale).

Efectul pe care subeșantionarea îl are în domeniul timp este ilustrat în figura 5. Semnalul subeșantionat din figura 5-(a) are aceleași eșantioane ca semnalul imagine a sa din prima zonă Nyquist, reprezentat în figura 5-(b). Informația despre frecvența inițială a semnalului s-a pierdut prin subeșantionare, dar dacă semnalul ar fi fost modulat se conservau diferențele de frecvență și fază între componentele sale spectrale.

Dacă înainte de eșantionare, sau subeșantionare, banda semnalului analogic  $B$  nu îndeplinește condiția teoremei eșantionării, reflectată în figurile 6-(a) și (b), depășind în valoare frecvența Nyquist  $f_s/2$  ca în figura 6-(c), se produc distorsiuni de neînlăturat prin apariția unor componente spectrale *fantomă* (eng. *aliasing*). Imaginile spectrului de frecvență original (în practică semnal util sau zgomot) se extind în zonele Nyquist învecinate, cum sugerează zona spectrală întunecată din figura 6-(c). Pentru a se preîntîmpina producerea acestui fenomen nedorit, în toate cazurile practice conversia analog-numerică este precedată de o filtrare trece-jos, sau trece bandă, cu scopul de a înlătura surplusul de bandă din spectrul semnalului analogic  $x(t)$ .

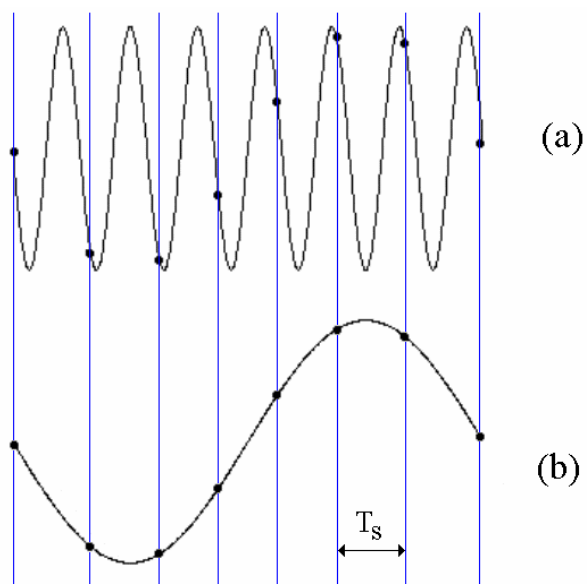


Figura 5

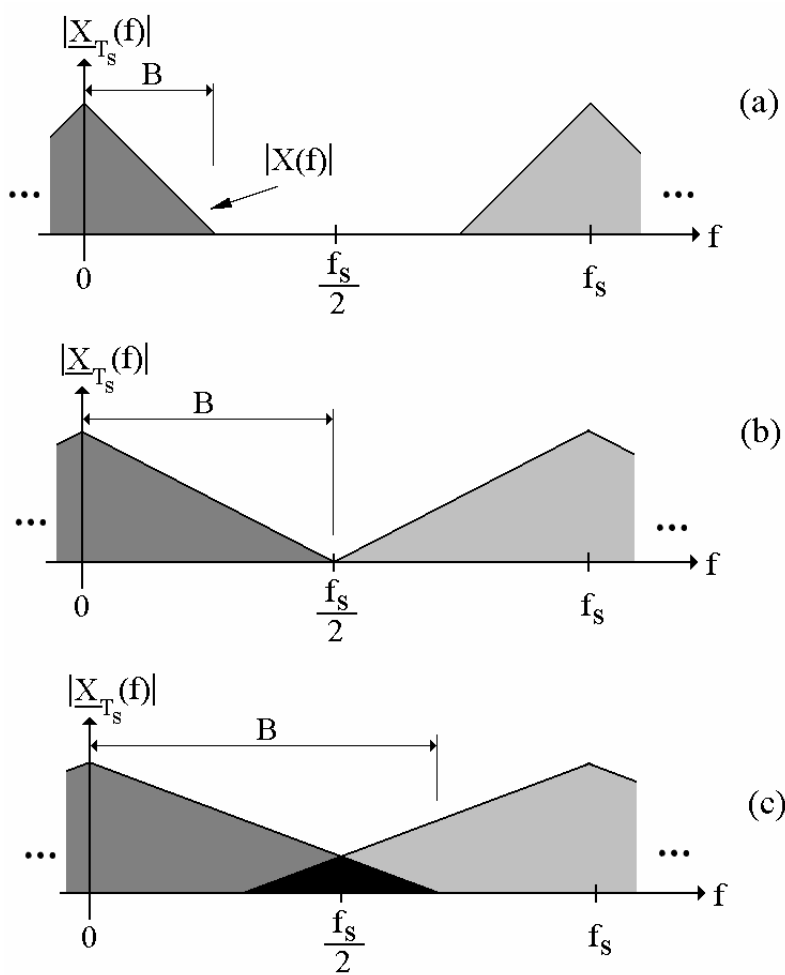


Figura 6

Dimensionarea adecvată a filtrului de limitare a benzii semnalului  $x(t)$  este foarte importantă. Primul pas îl constituie cunoașterea frecvenței maxime de interes  $f_a$  din spectrul său, iar apoi trebuie acceptată o anumită gamă dinamică  $GD$  în afara căreia contribuția componentelor spectrale ale semnalului eșantionat poate fi neglijată (o limită a fidelității semnalului). Efectul atenuării graduale introduse de filtru, pentru un semnal analogic aflat în prima zonă Nyquist, poate fi apreciat în figura 7-(a).

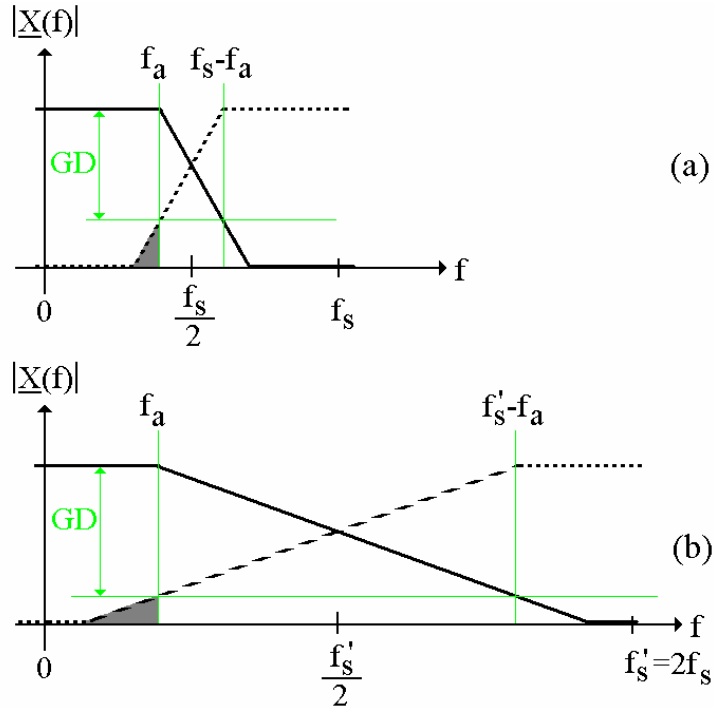


Figura 7

Specificația filtrului trece-jos este:

- frecvența de tăiere:  $f_a$ ;
- banda de tranziție: de la  $f_a$  la  $f_s - f_a$ ;
- atenuarea în banda de oprire:  $GD$  dB.

Panta de atenuare a filtrului este de  $6M$  dB/octavă, unde  $M$  este ordinul filtrului (numărul de poli).

$$M = \frac{GD}{6 \log_2 \left( \frac{f_s - f_a}{f_a} \right)} \quad (5)$$

Relația (5) consideră că amplitudinea componentelor spectrale este aceeași, și anume maximă, în întreaga bandă utilă a semnalului. În practică însă nu aceasta este situația, putînd exista în mod natural o energie mai mică la componentele din semnal cu frecvențe mari. Complexitatea filtrului poate fi însă redusă și pe seama creșterii valorii frecvenței de eșantionare  $f_s$ , adică prin supraeșantionarea semnalului analogic  $x(t)$ , ca în

figura 7-(b). Cu cât noua frecvență de eșantionare  $f'_s$  este mai mare decât cea cerută de teorema eșantionării,  $f_s$ , cu atât mai simplă poate fi structura filtrului datorită unui număr de poli mai mic și caracteristica sa de fază mai convenabilă.

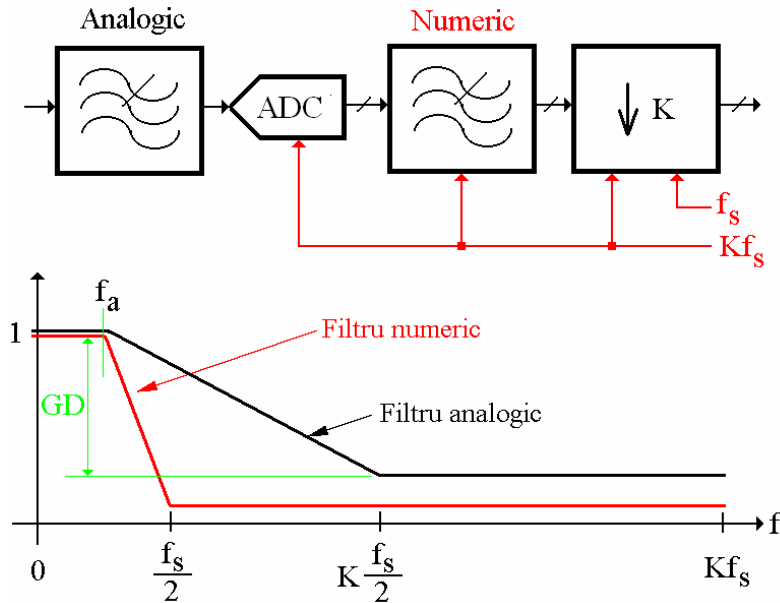


Figura 8

$$f'_s = K f_s$$

$$M' = \frac{GD}{6 \log_2 \left( \frac{f'_s - f_a}{f_a} \right)} < M \quad (6)$$

După efectuarea conversiei analog-numerice supraeșantionarea semnalului util nu mai este necesară, mai mult de atât ea suprasolicită blocul de calcul numeric prin numărul mărit de eșantioane pe care îl furnizează acestuia în unitatea de timp. De aceea, o supraeșantionare este uzual urmată imediat de extragerea benzii utile din semnalul eșantionat printr-o filtrare numerică trece jos în care frecvența de blocare este chiar frecvența Nyquist a semnalului  $x(t)$  și apoi de revenirea la frecvența de eșantionare normală (în conformitate cu cerința teoremei eșantionării) prin decimare cu factorul  $K$ . Procesul este descris în figura 8.

Dacă semnalul  $x(t)$  este într-o zonă Nyquist superioară, filtrului trece-jos trebuie înlocuit cu unul trece-bandă, ca în figura 9.

În acest caz specificația caracteristicii filtrului trece-bandă, de exemplu pentru un semnal analogic plasat în cea de a treia zonă Nyquist, este:

- frecvențe de tăiere:  $f_1$  și  $f_2$ ;
- benzi de tranziție: de la  $f_1$  la  $2f_s - f_1$  și de  $f_2$  la  $3f_s - f_2$ ;
- atenuarea în banda de oprire:  $GD$  dB.

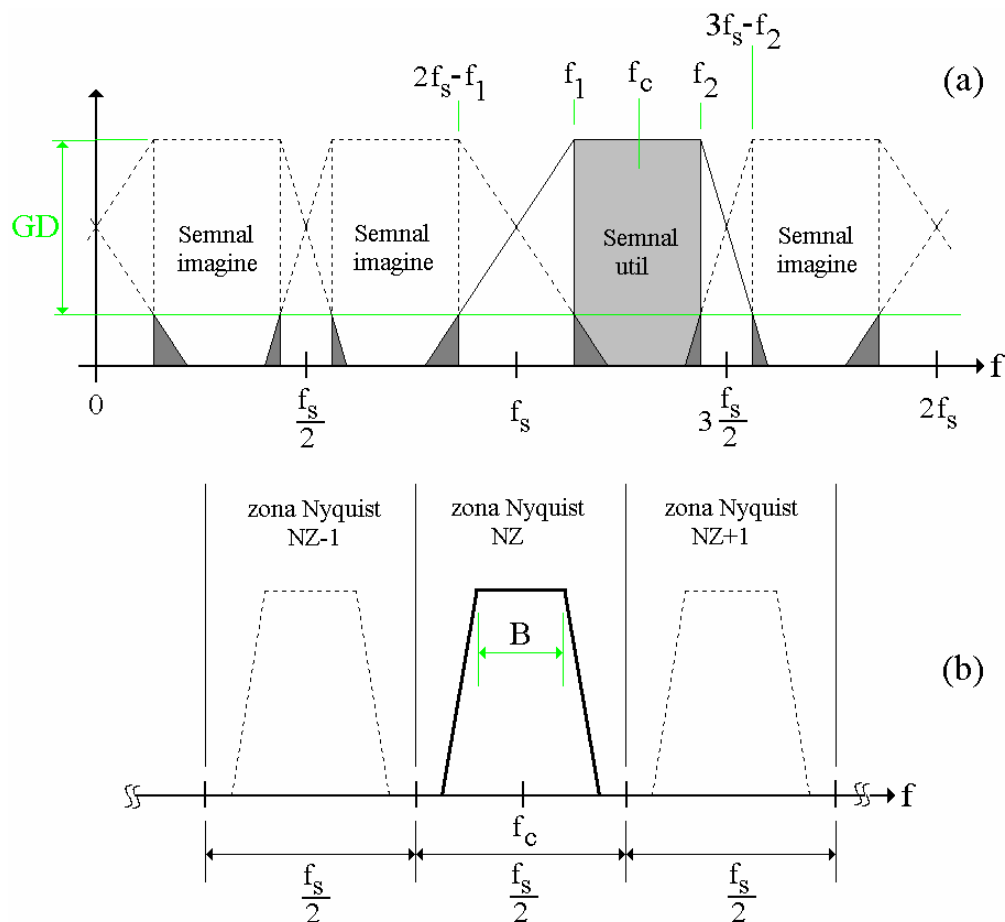


Figura 9

Realizabilitatea fizică a filtrului trece-bandă în limitele specificațiilor de mai sus este condiționată de o alegere favorabilă a frecvenței de subeșantionare  $f_s$ . Ecuațiile (7) constituie baza acestei alegeri. Prima ecuație reflectă cerința teoremei eșantionării, iar a doua plasează frecvența centrală a spectrului semnalului analogic  $f_c$  la mijlocul zonei Nyquist  $NZ$ , ca în figura 9-(b).

$$f_s > 2B$$

$$f_s = \frac{4f_c}{2NZ - 1} \quad (7)$$

O relație mai generală decât (7) de determinare a valorilor permise pentru frecvența de eșantionare  $f_s$  este (8).

$$\frac{2f_c + B}{NZ + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_c - B}{NZ} \quad (8)$$



## **BIBLIOGRAFIE**

- [1] - Jeffrey H. Reed, “*Software Radio: A Modern Approach to Radio Engineering*”, Prentice Hall, 2002, ISBN 0-13-081158-0
- [2] - A. Mateescu, S. Ciochină, N. Dumitriu, A. Șerbănescu, L. Stanciu, “*Prelucrarea numerică a semnalelor*”, Ed. Tehnică, București, 1997
- [3] - ----- “*Fundamentals of Sampled Data Systems*”, ANALOG DEVICES, AN-282;
- [4] – Rodger H. Hosking, “*Software Defined Radio Handbook*”, Pentek Inc., <http://www.pentek.com>
- [5] - Walt Kester, “*High Speed Sampling and High Speed ADC*”, Analog Devices, <http://www.analog.com/>